基于欧氏度规的四维速度矢量及其应用

刘小灵

深圳市乐得瑞科技有限公司

摘要：

基于闵氏时空定义的四维速度矢量，并非由运动物体在四个维度各自的运动速度构成，缺乏直观的物理意义，提升了计算和分析的复杂度。本文提出了一种基于欧氏度规，四个分量与物体在四维时空的运动速度一一对应的四维速度矢量定义，并建立了与此四维速度矢量匹配的时空坐标系及其线元计算方法。本文基于此四维速度矢量和坐标系对狭义相对论和广义相对论中的若干问题进行了演算，得出了闵氏时空无法适用欧氏度规的原因。特别是从欧氏四维速度变化带来的动量和能量变化的角度，揭示了引力是时空结构而不是力的物理原理，说明了欧氏度规在相对论计算中比闵氏度规具有更显著的直观性。

关键词：四维速度矢量；闵氏时空度规；欧氏时空度规

分类号: O41

Email: lyndenliu@legendary.net.cn

1 引言

经典狭义相对论中的四维速度矢量是基于$d/\mathrm{d}\tau$定义的:

$$U^{\mu}=(c\frac{dt}{d\tau},\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau},\frac{dz}{d\tau}) \tag{1}$$

其中，t 为坐标时，τ为被观测运动物体固有时，四维速度矢量也可以写为:

$$U^{\mu}=(\gamma c,\gamma v_x,\gamma v_y,\gamma v_z) \tag{2}$$

其中，$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$为洛伦兹因子。

U^{μ}的模为:

$$|U|=c \tag{3}$$

经典的四维速度定义及其所依赖的闵氏度规，是相对论中重要数学的工具，

极大地推动了相对论相关的研究。但是该四维速度矢量的第一维，并非物体在时间维度的“速度”，物理意义不够明确。

2 基于欧氏度规的四维速度矢量

我们尝试在欧氏度规下，以 d/dt 而不是 d/dτ来定义四维速度矢量V^{μ} 为：

$$V^{\mu} = (c\frac{d\tau}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \tag{4}$$

根据洛伦兹变换，$dt = \gamma d\tau$，此定义下的四维速度矢量也可以写成：

$$V^{\mu} = (\frac{c}{\gamma}, v_x, v_y, v_z) \tag{5}$$

在这个四维矢量V^{μ}中，第一分量是物体在时间这个维度上的速度，后面三项则是物体在空间维度上的速度。这样四个速度组合在一起，形成了物理意义明确的四维速度矢量，并且能够适配更为人们所熟知的欧氏度规。在后续章节中，我们称之为欧氏四维速度矢量。

下面我们用欧氏度规来计算V^{μ}的模长。

$$|V|^2 = \left(\frac{c}{\gamma}\right)\left(\frac{c}{\gamma}\right) + (v_x)(v_x) + (v_y)(v_y) + (v_z)(v_z) \tag{6}$$

$$|V|^2 = \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2 + v^2 \tag{7}$$

其中洛伦兹因子 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$，所以$\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2 = c^2 - v^2$，因此，欧氏四维速度的模为：

$$|V| = c \tag{8}$$

欧氏四维速度矢量模长恒为光速的特性得到了验证。

通过对比式 5 和式 2，我们可以发现，欧氏四维速度中的每一个维度元素，都可以使用闵氏四维速度的元素通过线性变换得到。因此，闵氏四维速度矢量的洛伦兹协变性可以保证欧氏四维速度矢量在所有惯性系中的形式不变。式 8 证明了欧氏四维速度在所有惯性系中的模长不变。因此，我们可以认为，欧氏四维速度矢量具有洛伦兹协变性。

3 基于欧氏四维速度矢量的四维动量与能量

3.1 基于欧氏四维速度矢量的动量

欧氏四维速度矢量基于 d/dt 定义，在此参考系中，我们使用相对论性质量γm计算欧氏四动量矢量P^{μ}。

$$\mathrm{P}^{\mu} = \left(\frac{c}{\gamma}\gamma m, \gamma m \mathrm{V_x}, \gamma m \mathrm{V_y}, \gamma m \mathrm{V_z}\right) \tag{9}$$

可以简化为：

$$P^{\mu} = \left(mc, \gamma m V_x, \gamma m V_y, \gamma m V_z\right) \tag{10}$$

欧氏四动量的时间分量为 mc，而空间分量是经过洛伦兹因子修正的$\gamma m V_i$。

3.2 欧氏四动量的模量

我们接下来考虑欧氏四动量的模量$P^{\mu}P_{\mu}$，并根据欧氏度规平方和的定义，得到：

$$P^{\mu}P_{u} = (mc)^2 + (\gamma m V)^2 \tag{11}$$

代入$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$化简后得到：

$$P^{\mu}P_{\mu} = \gamma^2 m^2 c^2 \tag{12}$$

通过这个计算结果可以看出，欧氏度规下，动量的模量与闵氏度规下不同。这是因为闵氏度规下，四动量的模量，是用总动量的平方减去空间动量的平方，得到的是时间维度的动量的平方。而欧氏度规下，我们得到的是物体总动量的平方。下面我们来考察动量与能量的关系。

3.3 欧氏四动量与能量的关系

狭义相对论框架下，运动物体的总能量为：

$$E = \gamma m c^2 \tag{13}$$

与我们所计算出来的欧氏四动量模量的关系为：

$$P^{\mu}P_{\mu} = \gamma^2 m^2 c^2 = (\gamma m^2 c^2/c)^2 = (E/c)^2 \tag{14}$$

由此可见，欧氏度规下计算出来的动量模量，为物体四维总动量。符合相对论的能量与动量关系。

4. 欧氏四维速度矢量所依赖的坐标系

闵可夫斯基通过在笛卡尔三维坐标系中，增加一维时间 t，并提出闵氏度规，构建了闵氏线元表达式。

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{15}$$

闵氏度规无法适配我们定义的欧氏四维速度，因此我们需要一个能够适配欧氏度规的坐标系。

我们在笛卡尔三维坐标系基础上，增加ρ=ct 作为极径，θ=arcsin(1/γ)作为极角，形成复合坐标系。为方便理解和计算，增加垂直于 X 轴的 cτ轴作为物体世界线在水平方向的投影轴(τ值依赖于 t 和γ，不作为独立维度)。我们称之为笛卡尔-τ坐标系，描述的时空是欧氏时空。

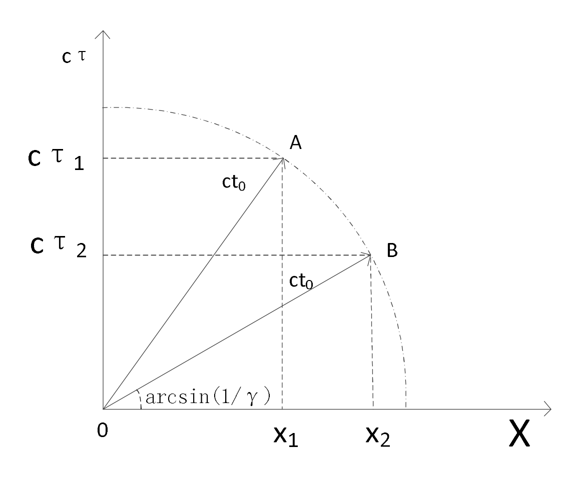


图 1 笛卡尔-τ坐标系

笛卡尔-τ坐标系中，x 轴代表了类光世界线。τ轴代表了参考系中静止物体的世界线。介于 X 轴和τ轴之间的是各惯性系的世界线。

如图，两个匀速直线运动的物体 A 和 B，运动速度分别为 V_1 和 V_2，对应的洛伦兹因子为 γ_1 和 γ_2。取极径 $\rho=ct_0$ 的圆弧与物体 A 和 B 的世界线分别相交于 A 点和 B 点，则 A 的极坐标是 $(ct_0,\arcsin(1/\gamma_1))$，B 的极坐标是 $(ct_0,\arcsin(1/\gamma_2))$。它们的世界线 OA 和 OB 在 X 轴上的投影分别是他们走过的空间距离 x_1 和 x_2，在τ轴上的投影是各自的固有时与光速的乘积 $c\tau_1$ 和 $c\tau_2$。基于此坐标系的线元长度为：

$$c^2dt^2 = c^2d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{16}$$

一维空间下，OA 和 OB 的世界线线元 ct 满足：

$$c^2 t_0^2 = c^2 \tau_1^2 + x_1^2 \tag{17}$$

$$c^2 t_0^2 = c^2 \tau_2^2 + x_2^2 \tag{18}$$

式 17 和式 18, 说明了同一个物体的世界线上正交分解出来的“时间”与“空间”分量，存在互相“垂直”的关系。闵氏时空中无法适用欧氏度规的原因是，坐标的纵轴描述了静止在坐标原点的观测者所经历的时间, 而横轴描述了运动物体上的观测者所走过的距离。这是两个不同惯性系的观测者所经历的时间和空间，物理意义上不“垂直”，从而无法适配欧氏度规。

5 欧氏四维速度在广义相对论中的应用

基于式 16 的欧氏线元与式 15 的闵氏线元是同一个物理原理的不同表达形式。因此，欧氏度规同样适用于广义相对论。下面我们以人们熟知的施瓦西度规张量为例，进行分析和对比。闵氏时空下，施瓦西度规的线元表达式为:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \tag{19}$$

其中，$r_s = \frac{2GM}{c^2}$为施瓦西半径。

对比式 16 和式 15，可以看出闵氏时空的线元ds^2等价于笛卡尔-τ坐标系中的$-c^2 d\tau^2$，代入式 19 后得到:

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \tag{20}$$

移项后变形为笛卡尔-τ坐标系的线元表达式:

$$c^2 dt^2 = \frac{c^2 d\tau^2}{1-\frac{r_s}{r}} + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} + \frac{r^2}{1-\frac{r_s}{r}} (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \tag{21}$$

如果只考虑径向方向的变化，即令$d\theta = 0$和$d\varphi$=0，我们可以简化为:

$$c^2 dt^2 = \frac{c^2 d\tau^2}{1-\frac{r_s}{r}} + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} \tag{22}$$

对比式 17 和式 22，我们可以看出，狭义相对论的平直时空中，同一个物体经历的时空相互“垂直”，符合勾股定理。在施瓦西时空中，由于大质量物体的影响，

时空之间的"垂直"关系被破坏。时间和空间两个维度需要通过各自的系数(与$1-\frac{r_s}{r}$有关的项)进行修正后，才能满足勾股定理。这些修正系数蕴含了时空的几何结构信息。

5.1 时空弯曲导致的时间膨胀效应

为研究施瓦西时空中静止的物体，我们可以想象出一个在黑洞外围，依靠自身引擎抵抗引力，悬停在距离奇点为 r 处的飞船。在式 22 中，我们令$dr=0$，那么我们可以得到飞船上观测者的固有时 dτ与无穷远观者的坐标时 dt 之间的表达式：

$$d\tau = \mathrm{dt}\sqrt{(1-\frac{r_s}{r})} \tag{23}$$

5.2 施瓦西时空中欧氏四维速度矢量及动量和能量关系

根据式 5 和式 23，施瓦西时空中静止物体的欧氏四维速度矢量为：

$$V_s^{\mu} = \left(c\frac{\mathrm{d\tau}}{dt}, 0,0,0\right) = (c\sqrt{(1-\frac{r_s}{r})}, 0,0,0) \tag{24}$$

其对应的动量为：

$$P_s^{\mu} = \left(\mathrm{mc}\sqrt{(1-\frac{r_s}{r})}, 0,0,0\right) \tag{25}$$

根据式 14，其对应的物体总能量为：

$$E_{s0} = c\sqrt{P^{\mu}P_{\mu}} = \mathrm{m}c^2\sqrt{(1-\frac{r_s}{r})} \tag{26}$$

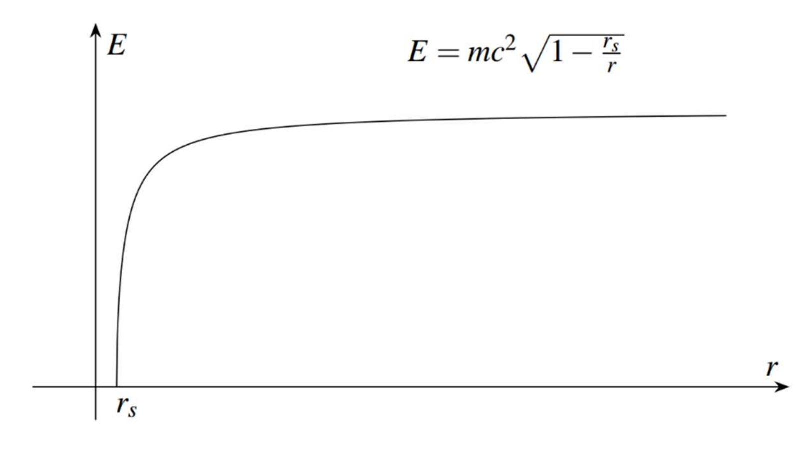


图 2 物体静能随径向坐标 r 变化

如图 2 所示，在施瓦西时空中，物体的静能在 r=rs 附近随 r 的变换急剧下降，物体的静能快速转换为自由落体运动的动能。

E_{s0}为物体在施瓦西时空中静止时的总能量。如果把物体的动能考虑进去，我们可以得到施瓦西时空中运动物体的总能量为：

$$E_s = \gamma \mathrm{m} c^2 \sqrt{(1-\frac{r_s}{r})} \tag{27}$$

从式 26 我们可以看出与平直时空中的静止物体的总能量$E = m_0 c^2$相比，施瓦西时空中相同质量静止物体的总能量降低了。当然，能量并不是凭空消失了，而是转化成了物体在施瓦西时空中自由落体的动能。所以，在重力场中因为时空弯曲而不断加速的物体，与平直时空中受到推力而不断加速的物体，在能量变化上有着本质的不同。前者并未获得能量，而是在特殊的时空结构下，"静能"转化成了“动能“。后者则是受到其他物体对其做功，在不损失静能的情况下，增加了动能，总能量增大。

5. 3 施瓦西时空中使用闵氏四维速度矢量进行计算时的动量和能量关系

为了验算两种四维速度矢量定义在引力场中的计算结果是否一致，我们使用闵氏时空中的闵氏四维速度矢量进行与 5.2 节相同的计算。注意到式 1 的定义中，需要使用到光速常数 c，我们还需要求出施瓦西时空在 r 处的“有效光速”，并修正式 1。在式 22 中，我们令$d\tau = 0$那么我们将会得到光在史瓦西时空径向的运动情况

$$dr = cdt(1-\frac{r_s}{r}) \tag{28}$$

如果我们想要得到施瓦西时空中物体所感受到的“有效光速”，我们需要求出$\mathrm{dr}/\mathrm{d}\tau$，这才能够与$\mathrm{dt}/\mathrm{d}\tau$保持在同一个参考系。结合式 23 和式 28 我们得到：

$$\mathrm{C_e} = \frac{dr}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{cdt}(1-\frac{r_s}{r})}{\mathrm{dt}\sqrt{(1-\frac{r_s}{r})}} = \mathrm{c}\sqrt{1-\frac{r_s}{r}} \tag{29}$$

利用这个系数修正后，我们得到引力场中静止物体的闵氏四维速度矢量的定

义:

$$U_s^{\mu}=\left(\mathrm{C_e}*\frac{dt}{d\tau},0,0,0\right)=(c\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}*\frac{dt}{d\tau},0,0,0) \qquad (30)$$

把式 23 代入式 30，我们得出施瓦西时空中静止物体的闵氏四维速度矢量为:

$$U_s^{\mu}=(\frac{c\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}}{\sqrt{(1-\frac{r_s}{r})}},0,0,0)=(c,0,0,0) \qquad (31)$$

通过式 31 的四维速度矢量进行推演，我们应该得到与式 26 相同的能量结果。

首先通过式 31 得到闵氏四维动量:

$$P^{\mu}=(mc,0,0,0) \qquad (32)$$

然后再通过动量与能量的关系式 $E=P^0*C$，再得到能量，注意，这里的 C 要使用有效光速$\mathrm{C_e}$:

$$E_s=mc*\mathrm{C_e}=mc^2\sqrt{(1-\frac{r_s}{r})} \qquad (33)$$

与式 26 相同。

这说明只要把四维速度矢量和能量动量运算过程中的每一个因素的物理意义都彻底弄清楚，就可以顺利地把狭义相对论中的四维速度矢量，动量和能量推广到广义相对论中。

5.4 施瓦西时空中的物体的受到的“引力”

通过 5.2 节的分析，我们已经知道了物体在施瓦西时空中并未受到“万有引力”的作用，而是在时空几何结构的作用下，能量的形式发生了转化。为了求得物体在施瓦西时空中因能量转化而感受到的“引力“，我们尝试通过动能公式推导物体受到的“力”。我们知道，物体的动能等于物体的总能量减去静能。根据式 13 和式 26 我们可以得出施瓦西时空中自由落体运动物体的动能E_k为平直时空中的“静能”减去施瓦西时空中的”静能“。

$$E_k=mc^2-mc^2\sqrt{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}=mc^2(1-\sqrt{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}) \qquad (34)$$

根据功的定义公式:

$$F=\frac{dE_k}{dr}=\frac{dmc^2(1-\sqrt{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}))}{dr}=-\frac{1}{2}mc^2\frac{r_s}{r^2}(1-\frac{r_s}{r})^{-\frac{1}{2}} \qquad (35)$$

这表示在施瓦西时空中的物体，会受到一个与 r 增大的方向相反的力，即指向黑洞中心的力。代入$r_s=\frac{2GM}{c^2}$，再经过化简，我们得到:

$$|\mathrm{F}|=\frac{GMm}{r^2}(1-\frac{r_s}{r})^{-\frac{1}{2}} \qquad (36)$$

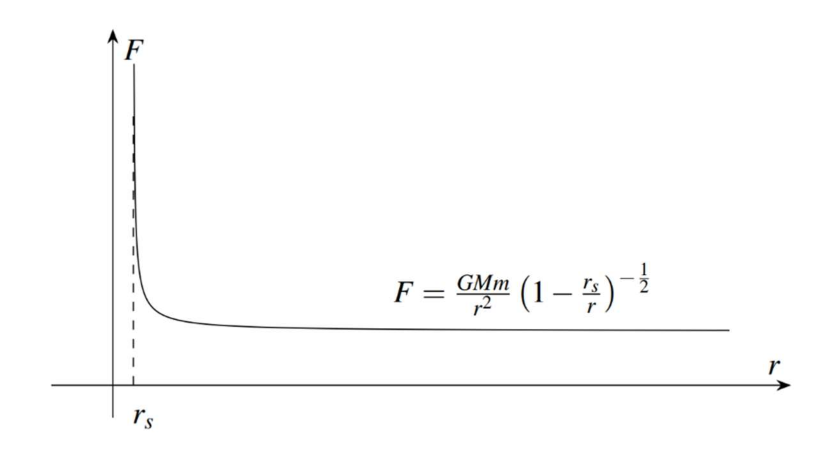


图 3 施瓦西时空中的万有引力与径向坐标 r 的关系

这就是物体在施瓦西时空中受到的虚拟的“万有引力”的计算公式。当 r=∞时，此计算公式与牛顿万有引力定律的计算公式相同。如图 3 所示，物体在施瓦西时空中感受到的万有引力，在$r=r_s$附近急剧增大。

5.5 引力红移

光子的能量源自电子在不同能级或轨道之间跃迁时的能量差。在史瓦西时空（Schwarzschild spacetime）中，物体的静止能量减少会导致发射光的能量相应地损失。因此，红移比值预计与静止能量减少的比例相对应。设$h\nu_1$表示在史瓦西时空内由某物体发射的光子能量，而$h\nu_0$则表示同一物体在平直时空中发射的光子能量。这两者之间的关系可以表达为:

$$\frac{h\nu_1}{h\nu_0}=\frac{mc^2\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}}{mc^2}=\sqrt{1-\frac{r_s}{r}} \qquad (37)$$

此方程表明,在史瓦西时空中发射的光子能量相比于平直时空中的光子能量减少了$\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}$这一因子。因此，光子的频率降低，导致了引力红移。这一推导与引力红移的传统解释非常吻合,证实了观察到的红移是史瓦西度规所描述的引力时间膨胀的直接结果。此外，这一结论为参考文献[10]提供了基本原理上的支持。

5.6 引力透镜

在引力场中，光的有效速度会变化，光线通过史瓦西时空可以视为穿过一个具有空间变化折射率的介质。因此，在计算引力透镜效应造成的星光偏折时，也可以应用几何光学方法。这种介质的折射率$n(r)$定义为真空中光速 c 与介质中光的有效速度c_{eff}的比值:

$$n(r)=\frac{c}{c_{eff}(r)}=\frac{c}{c(1-\frac{r_s}{r})}=\frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}\approx 1+\frac{r_s}{r} \tag{38}$$

请注意，c_{eff}是从公式(28)得出的，它是相对于dt的有效光速。在这种情况下，我们是为无穷远处的观测者计算透镜效应,因此有效光速不同于施瓦西时空中物体的“本地有效光速”$\mathrm{C_e}$。根据公式(37)，这个表达式与参考文献[8]中给出的方程[10]的一阶近似相一致。因此，我们可以得到太阳引力场引起的光线总偏折角为:

$$\alpha=\frac{2r_s}{b}\approx 1.75\ 角秒 \tag{39}$$

其中,影响参数b是入射光线的渐近(未弯曲)路径与太阳中心之间的垂直距离,实际计算中取太阳半径值。

6. 结论

本文基于 d/dt定义了欧氏四维速度矢量，验证了其合理性，并定义了一个适配欧氏度规的笛卡尔-τ坐标系。本文通过对笛卡尔-τ坐标系中欧氏度规的计算验证，得出了闵氏几何无法适用欧氏度规的原因。本文还基于欧氏度规线元计算公式，对爱因斯坦场方程的施瓦西解进行了分析。通过对比欧氏四维速度矢量在平直时空和施瓦西时空的差异，本文从能量变化的角度，揭示了引力是时空结构而

不是力的物理原理。欧氏四维速度矢量可以用来描述任何物质或者粒子的速度、能量甚至是所处的时空度规，比闵氏四维速度矢量具有更加直观的物理意义，还可以在更多的物理研究领域发挥作用。

参考文献

[1] Albrecht Klemm, Christoph Nega, Benjamin Sauer, Jan Plefka,Calabi-Yau periods for black hole scattering in classical general relativity, Physical Review D 109, 124046 (2024).

[2] Rafael A. Porto,The Effective Field Theorist's Approach to Gravitational Dynamics, Elsevier, 2016.

[3] Ophir Flomenbom,The Gravity Field: In the Origin of Matter and Almost Everywhere Else, Reports in Advances of Physical Sciences, Vol. 8 (2024).

[4] Thibault Damour,Gilles Esposito,The Gravity Field: Testing gravity to second post-Newtonian order :a field-theory approach,Phys. Rev. D 53, 5541 - Published 15 May 1996

[5] P. D. Morley,Why are Black Holes Stable Against Their Own Gravity?,Reports in Advances of Physical Sciences,Vol. 8 (2024).

[6] Tristan NeedHam, Visual Differential Geometry and Forms, Princeton University Press 2021.

[7] Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, 1972.

[8] Ye, X. H., Lin, Q. (2008). A simple optical analysis of gravitational lensing. Journal of Modern Optics, 55(7), 1119–1126. https://doi.org/10.1080/09500340701618395

[9] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics (7th edition) (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

[10] Ortiz, C., Ibarra-Castor, F. Generalized redshift formula through an energy-based framework. Sci Rep 14, 22638 (2024). https://doi.org/10.1038/s41598-024-73191-4

Four-dimensional velocity vector based on the Euclidean metric and its applications

Liu Xiaoling

Shenzhen Legendary Technology Co., Ltd.

Abstract

Based on the Minkowski spacetime, the four-dimensional velocity vector is not composed of the individual velocities of a moving object in four dimensions, lacking intuitive physical significance and increasing the complexity of calculations and analysis. This paper proposes a definition of the four-dimensional velocity vector based on the Euclidean metric, where the four components correspond one-to-one to the object's velocity in four-dimensional spacetime. It establishes a spacetime coordinate system that matches this four-dimensional velocity vector, along with a method for calculating the Euclidean metric. Using this four-dimensional velocity vector and coordinate system, this paper performs calculations on several issues in both special and general relativity, revealing the reasons why Minkowski spacetime cannot apply the Euclidean metric. In particular, from the perspective ofenergy gradient brought about by variations in the Euclidean four-velocity, it reveals that gravity is a property of spacetime structure rather than a force. It demonstrates that using the Euclidean metric in relativistic calculations offers greater intuitive clarity than the Minkowski metric.

Keywords:Four-dimensional velocity vector;Minkowski spacetime metric;Euclidean spacetime metric